

9.3 Теориялық сұрақтар

1. $f(z)$ функциясының z_0 нүктесіндегі *шегермесі* дегеніміз не? Белгіленуі.
2. $\operatorname{res} f(z_0) = c_{-1}$ жазылымының мағынасын түсіндіріңіз.
3. Түзетілетін айрықша нүктедегі шегерменің мәні неге тең?
4. Егер z_0 нүктесі $f(z)$ функциясының n - ші ретті полюсі болса, онда $\operatorname{res} f(z_0)$ неге тең?
5. z_0 қарапайым полюс ($n=1$) болған жағдайда $\operatorname{res} f(z_0)$ неге тең?
6. Егер $f(z)$ функциясы z_0 нүктесінің аймағында $\varphi(z)$ және $\psi(z)$ $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ түрінде берілсе және z_0 нүктесі $f(z)$ функциясының қарапайым полюсі болса, онда $\operatorname{res} f(z_0)$ неге тең?
7. $f(z)$ функциясы $z = \infty$ шексіз алыс нүктесінде *аналитикалық болуы*.
8. Қай жағдайда $z = \infty$ нүктесі $f(z)$ функциясының *оқшауланған айрықша нүктесі* деп аталады?
9. Функцияның түзетілетін айрықша нүктесі, полюсі немесе маңызды (елеулі) айрықша нүктесі қалай анықталады?
10. $z = \infty$ нүктесі $f(z)$ функциясының түзетілетін айрықша нүктесі болу шарты.
11. $z = \infty$ нүктесі $f(z)$ функциясының полюсі болу шарты.
12. $z = \infty$ нүктесі $f(z)$ функциясының маңызды айрықша нүктесі болу шарты.
13. $f(z)$ функциясының *шексіздіктегі шегермесі* деп нені атаймыз?
14. Шегермелерінің $z = \infty$ нүктесіндегі шегермесін қоса есептегендегі қосындысы нөлге тең болуы туралы теорема.
15. Егер $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ берілген $f(z)$ функциясының барлық тиянақты айрықша нүктелері болса, онда қандай теңдік орынды?

9.4 Аудиториялық тапсырмалар

№1. $f(z) = \cos z \sin \frac{1}{z}$ функциясының $z = 0$ айрықша нүктесіндегі шегермесін табыңыз.

№2. $f(z) = e^{\frac{1}{z^2}} \cos z$ функциясының $z = 0$ нүктесіндегі шегермесін табыңыз.

№3. $f(z) = \frac{\sin(z^2 + 4)}{z - 2i}$ функциясының айрықша нүктесіндегі шегермесін табыңыз.

№4. $f(z) = \frac{e^z}{(z+1)^3(z-2)}$ функциясының айрықша нүктелеріндегі шегермелерін табыңыз.

№5. $f(z) = \frac{e^z}{e^z - 1}$ функциясының айрықша нүктелеріндегі шегермелерін табыңыз.

№6. $f(z) = \frac{\sin 3z - 3 \sin z}{(\sin z - z) \sin z}$ функциясының $z = 0$ нүктесіндегі шегермесін табыңыз.

№7. $f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z}}}{1 - z}$ функциясының айрықша нүктелеріндегі шегермелерін табыңыз.

№8. $f(z) = \frac{1}{\sin z}$ функциясын қарастырайық. $z = z_k = k\pi$, ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) нүктелерінде $\sin z = 0$ болғандықтан $z_k = k\pi$ нүктелері $f(z)$ функциясы үшін айрықша нүктелер болады.

Сонымен қатар $\varphi(z) = f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{\sin \frac{1}{z}}$ функциясы үшін $z = 0$ нүктесі айрықша

болғандықтан $z = \infty$ нүктесі де $f(z)$ функциясының айрықша нүктесі болады.

$z = \infty$ айрықша нүктесі $f(z)$ функциясының *оқшауланбаған* айрықша нүктесі бола ма?

№9. $f(z) = \frac{z+1}{z}$ функциясы үшін $f(z) = 1 + \frac{1}{z} = 1 + 1 \cdot z^{-1}$. Бұл өрнекті функцияның шексіз алыс нүктенің $|z| > 0$ аймағындағы Лоран жіктелінуі ретінде қарастыруға бола ма? Шексіз алыс түзетілетін айрықша нүктеге қатысты шегермесі неге тең?